令和４年度　前期日程
入学者選抜学力検査問題

環境・情報科学科
数　学

〔注　意〕

1　机上に受験票を提示しておくこと。

2　監督者の指示があるまで，この問題冊子を開いてはいけない。

3　解答は必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。

4　すべての解答用紙に受験番号・氏名を必ず記入すること。受験番号・氏名が記載されていない答案は無効となる場合がある。

5　この冊子の問題は４ページからなっている。

6　解答用紙は４枚ある。

7　下書き用紙は４枚ある。

8　この問題冊子のうち，落丁・乱丁，印刷不鮮明な箇所があれば，手をあげて申し出ること。

9　解答用紙は持ち帰ってはいけない。

10　問題冊子と下書き用紙は，持ち帰ること。

$\boxed{1}$ 以下の問いに答えよ.

(1) $5^{\frac{2}{3}}$ が無理数であることを証明せよ.

(2) $\sqrt{3}$ が無理数であることを用いて, $\sqrt[3]{13}-\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ.

(3) 自然数 n が 30 と互いに素であるとき, n^2 を 12 で割った余りは 1 であることを証明せよ.

(配点 100 点)

$\boxed{\mathbf{2}}$ $0 < r < \dfrac{1}{2}$ とする． 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1,\ \ a_{n+1} = 2a_n + 3(n-1)\ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．以下の問いに答えよ． $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ は用いてよい．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nr^n = \frac{r}{(1-r)^2}$ が成り立つことを示せ．

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{n-1}$ を r を用いて表せ．

(配点 100 点)

$\boxed{3}$　O を原点とする xyz 空間内に 3 点 A(1, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, 3) がある．3 点 A, B, C の定める平面を α とする．α, xy 平面, yz 平面, zx 平面のすべてに接する球面は 2 つある．半径が小さい方の球面を Q_1，半径が大きい方の球面を Q_2 とする．Q_1, Q_2 の中心をそれぞれ C_1, C_2 とする．以下の問いに答えよ．

(1) 平面 α の方程式を求めよ．

(2) Q_1, Q_2 の方程式を求めよ．

(3) 直線 $\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2$ と α との交点の座標を求めよ．

(4) 4 点 A, B, C, O を通る球面の方程式を求めよ．

(配点 100 点)

$\boxed{4}$　$x>0$ で定義された微分可能な関数 $f(x)$ を

$$2xf(x)+7\int_2^x f(t)dt+\int_2^x tf'(t)dt=5x^3+6\int_1^2 t^3f(t)dt$$

によって定める．曲線 $C: y=f(x)$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $g(x)$ は $x>0$ で微分可能とする．$h(x)=f(x)+g(x)$ とし，$g(1)<0$，$g(2)>0$ とする．$1<x<2$ の範囲に $h(x)=0$ を満たす実数解が少なくとも 1 つ存在することを示せ．

(3) C と 3 直線 $y=-15$，$x=1$，$x=2$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

(配点 100 点)