令和 5 年度　前期日程　入学者選抜学力検査問題

環境・情報科学科　数学　解答例

$\boxed{1}$

x と y の最大公約数を $g(x,y)$, 最小公倍数を $\ell(x,y)$ とする

(1) a と b の正の公約数を p とすると $a = Mp,\ b = Np,\ \ell(a,c) = Lp$ となる 3 つの自然数 M, N, L が存在して

$\dfrac{g(a,c)+\ell(a,c)}{b} = \dfrac{g(a,c)+Lp}{Np}\ \cdots①$

$g(a,c)+\ell(a,c)$ は b で割り切れるので $\dfrac{g(a,c)+\ell(a,c)}{b} = K\ \cdots②$ となる自然数 K が存在

①, ② より $g(a,c) = (KN-L)p$ なので p は c の約数

よって a と b の公約数は c の約数である　(証明終わり)

(2) a と b, b と c, c と a がそれぞれ互いに素なので

$g(a,b)=1,\ \ell(a,b)=ab,\ g(b,c)=1,\ \ell(b,c)=bc,\ g(c,a)=1,\ \ell(c,a)=ca$

よって $g(a,b)+\ell(a,b)=1+ab,\ g(b,c)+\ell(b,c)=1+bc,\ g(c,a)+\ell(c,a)=1+ca$

ここで $(1+ab)(1+bc)(1+ac) = 1+ab+bc+ac+abc(a+b+c+abc)$ なので

$1+ab+bc+ac = (1+ab)(1+bc)(1+ac) - abc(a+b+c+abc)\ \cdots③$

題意より $1+ab$ は c で割り切れ、$1+bc$ は a で割り切れ、$1+ca$ は b で割り切れるので

$(1+ab)(1+bc)(1+ac)$ は abc で割り切れる

よって ③ より $1+ab+bc+ac$ も abc で割り切れる

ゆえに $1+ab+bc+ca \geqq abc\ \cdots④$　(証明終わり)

(3) (1) より $g(a,b)$ は a と b と c の公約数

同様にすると $g(b,c)$ と $g(c,a)$ も a と b と c の公約数

$g(a,b) = p'$ とすると $a = a'p',\ b = b'p'$ となる 2 つの自然数 a', b' が存在して a' と b' は互いに素

p' は a と b と c の公約数なので $c = c'p'$ となる自然数 c' が存在して $\dfrac{a}{c} = \dfrac{a'}{c'}$

$g(c',a') = p''$ とすると $g(c,a) = p'p''$ であり $p'p''$ は a と b と c の公約数

よって $g(a,b) = p'$ を踏まえると $p'' = 1$ なので a' と c' は互いに素

同様にすると b' と c' も互いに素

ゆえに d の最大値を求めるときは a と b, b と c, c と a がそれぞれ互いに素であるとして考えればよい

$a > b > c$ より $ab+bc+ac < 3ab$

したがって ④ より $1+3ab > abc$ なので $1 > ab(c-3)\ \cdots⑤$

⑤ において $a > b > 1$ を踏まえると $c-3 \leqq 0$ なので $c \geqq 1$ を踏まえると $c = 1, 2, 3$

ⓘ $c = 1$ のとき

$g(a,b)+\ell(a,b) = 1+ab,\ g(b,c)+\ell(b,c) = 1+b,\ g(c,a)+\ell(c,a) = 1+a$

$1+b$ は a で割り切れるので $a > b$ を踏まえると $a = 1+b$

よって $1+a = 2+b$ であり $2+b$ は b で割り切れるので $b > c$ を踏まえると $b = 2$ であり $a = 3$

$\dfrac{1+ab}{c} = 7$ なので $1+ab$ は c で割り切れる

ⓘⓘ $c = 2$ のとき

$g(a,b)+\ell(a,b) = 1+ab,\ g(b,c)+\ell(b,c) = 1+2b,\ g(c,a)+\ell(c,a) = 1+2a$

$1+2b$ は a で割り切れるので $a > b$ を踏まえると $a = 1+2b$

よって $1+2a = 3+4b$ であり $3+4b$ は b で割り切れるので $b > c$ を踏まえると $b = 3$ であり $a = 7$

$\dfrac{1+ab}{c} = 11$ なので $1+ab$ は c で割り切れる

ⓘⓘⓘ $c=3$ のとき

$g(a,b)+\ell(a,b)=1+ab,\ g(b,c)+\ell(b,c)=1+3b,\ g(c,a)+\ell(c,a)=1+3a$

$1+3b$ は a で割り切れるので $a>b$ を踏まえると $a=1+3b, 2a=1+3b$

よって $a=1+3b$ のとき $1+3a=4+9b$ であり $4+9b$ は b で割り切れるので

$b>c$ を踏まえると $b=4$ であり $a=13$

しかし $\dfrac{1+ab}{c}=\dfrac{53}{3}$ なので $1+ab$ は c で割り切れない

$2a=1+3b$ のとき $1+3a=\dfrac{5}{2}+\dfrac{9}{2}b$ であり $\dfrac{5}{2}+\dfrac{9}{2}b$ は b で割り切れるので

$b>c$ を踏まえると $b=5$ であり $a=8$

しかし $\dfrac{1+ab}{c}=\dfrac{41}{3}$ なので $1+ab$ は c で割り切れない

ゆえに ⓘ, ⓘⓘ, ⓘⓘⓘ より d の最大値は $\dfrac{7}{2}\ \cdots$ (答)

$\boxed{2}$

(1) $\tan a_1 = \dfrac{1}{4}$, $\tan b_1 = \dfrac{3}{5}$ なので $\tan(a_1+b_1) = \dfrac{\tan a_1 + \tan b_1}{1 - \tan a_1 \tan b_1} = \dfrac{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{5}}{1-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{3}{5}} = 1 \quad \cdots ①$

$0 < a_1 < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < b_1 < \dfrac{\pi}{2}$ なので $0 < a_1 + b_1 < \pi \quad \cdots ②$

①, ② より $a_1 + b_1 = \dfrac{\pi}{4} \quad \cdots$ (答)

(2) $\tan a_k = \dfrac{k^2+3k-2}{k^2+3k+4}$, $\tan b_k = \dfrac{3}{k^2+3k+1} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)$ なので

$\tan(a_k+b_k) = \dfrac{\tan a_k + \tan b_k}{1-\tan a_k \tan b_k} = \dfrac{\dfrac{k^2+3k-2}{k^2+3k+4}+\dfrac{3}{k^2+3k+1}}{1-\dfrac{k^2+3k-2}{k^2+3k+4}\cdot\dfrac{3}{k^2+3k+1}} = 1 \quad (k = 1, 2, 3, \cdots) \quad \cdots ③$

$0 < a_k < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < b_k < \dfrac{\pi}{2} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)$ なので $0 < a_k + b_k < \pi \quad (k = 1, 2, 3, \cdots) \quad \cdots ④$

③, ④ より $a_k + b_k = \dfrac{\pi}{4} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)$

よって $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \dfrac{n\pi}{4} \quad \cdots$ (答)

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(c_{k+3}-c_k) = -c_1 - c_2 - c_3 + \lim_{n\to\infty}(c_{n+1}+c_{n+2}+c_{n+3}) \quad \cdots ⑤$

$\tan c_1 = 1$, $0 < c_1 < \dfrac{\pi}{2}$ なので $c_1 = \dfrac{\pi}{4} \quad \cdots ⑥$

$\tan c_2 = 2$, $\tan c_3 = 3$ なので $\tan(c_2+c_3) = \dfrac{\tan c_2 + \tan c_3}{1-\tan c_2 \tan c_3} = -1 \quad \cdots ⑦$

$0 < c_2 < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < c_3 < \dfrac{\pi}{2}$ なので $0 < c_2 + c_3 < \pi \quad \cdots ⑧$

⑦, ⑧ より $c_2 + c_3 = \dfrac{3}{4}\pi \quad \cdots ⑨$

$\tan c_n = n$, $0 < c_n < \dfrac{\pi}{2}$ なので $\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n = \dfrac{\pi}{2} \quad \cdots ⑩$

⑤, ⑥, ⑨, ⑩ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(c_{k+3}-c_k) = \dfrac{\pi}{2} \quad \cdots$ (答)

(4) (2) の結果より $\displaystyle n\pi - 4\sum_{k=1}^{n} a_k = 4\sum_{k=1}^{n} b_k \quad \cdots ⑪$

$\tan b_k = \dfrac{3}{k^2+3k+1} = \dfrac{(k+3)-k}{1+(k+3)k} = \dfrac{\tan c_{k+3} - \tan c_k}{1+\tan c_{k+3}\tan c_k} = \tan(c_{k+3}-c_k) \quad \cdots ⑫$

$0 < c_k < c_{k+3} < \dfrac{\pi}{2} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)$ なので $0 < c_{k+3} - c_k < \dfrac{\pi}{2} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots) \quad \cdots ⑬$

⑫, ⑬ より $b_k = c_{k+3} - c_k \quad (k = 1, 2, 3, \cdots) \quad \cdots ⑭$

よって ⑪, ⑭ および (3) の結果より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(n\pi - 4\sum_{k=1}^{n} a_k\right) = 4\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(c_{k+3}-c_k) = 2\pi \quad \cdots$ (答)

$\boxed{3}$

(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\frac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OL}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{3}{14}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{3}{14}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{3}{28}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

点 P は直線 BN 上にあるので

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{ON}}$

と表せる．よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{3}{28}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)=\frac{t}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{7-6t}{7}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{3t}{28}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\ \cdots①$$

そして点 P は平面 OAC 上にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OC}}\quad(\alpha>0,\beta>0,0<\alpha+\beta<1)\ \cdots②$$

と表せる．①，②より

$$\frac{7-6t}{7}=0,\quad \alpha=\frac{t}{4},\ \beta=\frac{3t}{28}$$

$$\therefore t=\frac{7}{6}$$

よって

$$\underline{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{7}{24}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{8}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\ (答)}$$

(2)

$$5\overrightarrow{QA}+4\overrightarrow{QB}+3\overrightarrow{QC}=\vec{0}$$
$$5(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OQ})+4(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OQ})+3(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OQ})=\vec{0}$$
$$5\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}-12\overrightarrow{OQ}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{OQ}=\frac{5\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}}{12}\quad\cdot\cdot\cdot③$$

点 L は線分 BC を 3:4 に内分するので，$\overrightarrow{OL}$は

$$\overrightarrow{OL}=\frac{4\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}}{7}\quad\cdot\cdot\cdot④$$

と表せる．③，④より，

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{5\overrightarrow{OA}+7\overrightarrow{OL}}{12}$$

このことから Q は AL を 7：5 に内分する点だとわかるので，
△ABC と△QBC の面積の比は

$$\frac{\triangle\mathrm{QBC}}{\triangle\mathrm{ABC}}=\frac{\mathrm{QL}}{\mathrm{AL}}$$

△ABC：△QBC=AL：QL

　　　　　　＝12：5 (答)

(3) Q は，球の中心である O から平面 ABC に引いた垂線と平面 ABC との交点であるから，△ABC の外心なので

$$|\overrightarrow{QA}|=|\overrightarrow{QB}|=|\overrightarrow{QC}|\quad\cdot\cdot\cdot⑤$$

となる．問題より

$$5\overrightarrow{QA}+4\overrightarrow{QB}+3\overrightarrow{QC}=\vec{0}$$

$$-5\overrightarrow{QA}=4\overrightarrow{QB}+3\overrightarrow{QC}$$
$$25|\overrightarrow{QA}|^2=16|\overrightarrow{QB}|^2+9|\overrightarrow{QC}|^2+24\overrightarrow{QB}\cdot\overrightarrow{QC}$$

⑤より

$$\overrightarrow{QB}\cdot\overrightarrow{QC}=0\quad\cdot\cdot\cdot⑥$$

$$\cos\angle\mathrm{BQC}=\frac{\overrightarrow{QB}\cdot\overrightarrow{QC}}{|\overrightarrow{QB}||\overrightarrow{QC}|}$$

⑥より　$\cos\angle\mathrm{BQC}=0$

$\therefore\angle\mathrm{BQC}=90°$

（2）より A は弧 BC のうち長い方の弧にあるから

$\angle\mathrm{BAC}=\frac{1}{2}\times\angle\mathrm{BQC}$＝45°（答）

(4) (3)より△ABCの外接円の半径を r とすると

$\mathrm{QB}=\mathrm{QC}=r$ より

$$\triangle\mathrm{QBC}=\mathrm{QB}\times\mathrm{QC}\times\frac{1}{2}=\frac{r^2}{2}$$

よって，(2)の解より

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{r^2}{2}\times\frac{12}{5}=\frac{6r^2}{5}$$

となり，問題より球の半径は 1 であるので

$1=r^2+\mathrm{OQ}^2$

$\mathrm{OQ}=\sqrt{1-r^2}$

となる.

よって，4 面体 OABC の体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\times\frac{6r^2}{5}\times\sqrt{1-r^2}=\frac{2}{5}\sqrt{r^4-r^6}$$

となる。

$f(r)=r^4-r^6$ とおくと

$f'(r)=4r^3-6r^5$

$\quad=-2r^3(3r^2-2)$

よって，$0<r<1$ において $f(r)$ の増減を表にすると次のようになる.

r	0		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		1
$f'(r)$		+	0	―	
$f(r)$		↗	極大	↘	

ゆえに，体積 V は

$r=\sqrt{\frac{2}{3}}$ のとき最大となり，体積 V の最大値は

$$\frac{2}{5}\sqrt{r^4-r^6}=\frac{2}{5}\cdot r^2\sqrt{1-r^2}=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{1-\frac{2}{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{45}$$

$\frac{4\sqrt{3}}{45}$ (答)

$\boxed{4}$

（1） 点 P について，

$\dfrac{dx}{dt}=e^t(\cos t-\sin t)=0$． $0\leqq t\leqq \pi$ で $e^t>0$ より $\cos t-\sin t=0$． よって， $t=\dfrac{\pi}{4}$． 増減表は

t	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	π
$\dfrac{dx}{dt}$		＋	0	－	
x		↗	極大	↘	

$t=\dfrac{\pi}{4}$ で $x=e^{\pi/4}\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}}$， $y=e^{\pi/4}\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}}$， ゆえに， $P\left(\dfrac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}},\dfrac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}}\right)$ $\cdots$（答）

点 Q について，

$\dfrac{dy}{dt}=e^t(\sin t+\cos t)=0$． $0\leqq t\leqq \pi$ で $e^t>0$ より $\sin t+\cos t=0$． よって， $t=\dfrac{3\pi}{4}$． 増減表は

t	0	$\cdots$	$\dfrac{3\pi}{4}$	$\cdots$	π
$\dfrac{dy}{dt}$		＋	0	－	
y		↗	極大	↘	

$t=\dfrac{3\pi}{4}$ で $x=e^{3\pi/4}\cos\dfrac{3\pi}{4}=-\dfrac{e^{3\pi/4}}{\sqrt{2}}$， $y=e^{3\pi/4}\sin\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{e^{3\pi/4}}{\sqrt{2}}$，ゆえに，$Q\left(-\dfrac{e^{3\pi/4}}{\sqrt{2}},\dfrac{e^{3\pi/4}}{\sqrt{2}}\right)$ $\cdots$（答）

（2）$x=e^t\cos t=0$，$0\leqq t\leqq \pi$ で $e^t>0$ より $\cos t=0$，$t=\dfrac{\pi}{2}$， このとき， $y=e^{\pi/2}\sin\dfrac{\pi}{2}=e^{\pi/2}$，

より， $R\left(0,e^{\pi/2}\right)$． $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t}$． $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=\dfrac{1}{-1}=-1$，

ゆえに，接線の方程式は $y=-x+e^{\pi/2}$ $\cdots$（答）

（3）（1）より，

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3\pi}{4}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$		+	0	―	―	―	―	―	
x		↗	$\frac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}}$	↘	0	↘	$-\frac{e^{3\pi/4}}{\sqrt{2}}$	↘	
$\frac{dy}{dt}$		+	+	+	+	+	0	―	
y		↗	$\frac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}}$	↗	$e^{\pi/2}$	↗	$\frac{e^{3\pi/4}}{\sqrt{2}}$	↘	

よって，面積は

$$S=\int_{\pi}^{\pi/4} y\frac{dx}{dt}dt-\int_{0}^{\pi/4} y\frac{dx}{dt}dt=\int_{\pi}^{0} e^{2t}(\sin t\cos t-\sin^2 t)dt$$

$$=\int_{\pi}^{0} e^{2t}\left(\frac{\sin 2t}{2}-\frac{1-\cos 2t}{2}\right)dt=\frac{1}{4}\int_{2\pi}^{0} e^{\theta}\left(\sin\theta-1+\cos\theta\right)d\theta$$

ここで，$2t=\theta$ とした．

$$I_1=\int_{2\pi}^{0} e^{\theta}\sin\theta d\theta=[e^{\theta}(\sin\theta-\cos\theta)]_{2\pi}^{0}-I_1\ \ I_1=\frac{1}{2}[e^{\theta}(\sin\theta-\cos\theta)]_{2\pi}^{0}$$

$$I_2=\int_{2\pi}^{0} e^{\theta}\cos\theta d\theta=[e^{\theta}(\sin\theta+\cos\theta)]_{2\pi}^{0}-I_2.\quad I_2=\frac{1}{2}[e^{\theta}(\sin\theta+\cos\theta)]_{2\pi}^{0}$$

$$S=\frac{1}{4}\{I_1+I_2-\int_{2\pi}^{0} e^{\theta}d\theta\}=\frac{1}{4}[e^{\theta}(\sin\theta-1)]_{2\pi}^{0}=\frac{e^{2\pi}-1}{4}\quad\cdots（答）$$

令和５年度　前期日程　入学者選抜学力検査問題
環境･情報科学科　数学　配点

$\boxed{1}$

（1）20 点，　（2）30 点，　（3）50 点

$\boxed{2}$

（1）20 点，　（2）25 点，　（3）25 点，　（4）30 点

$\boxed{3}$

（1）20 点，　（2）20 点，　（3）30 点，　（4）30 点

$\boxed{4}$

（1）40 点，　（2）20 点，　（3）40 点

以上